Los costes: ejercicios

José C. Pernías

Curso 2015–2016

Índice

Los costes: ejercicios

José C. Pernías

Curso 2015–2016

1. Ejercicio 1

Ejercicio 1

La función de producción de una empresa viene dada por la ecuación: $Q = 2KL$. Si sabemos que contrata el factor trabajo a un precio de 2 u.m. y el precio unitario del factor capital es de 4 u.m.

1. Si la empresa dispone de 200 u.m. para invertir en la compra de factores. ¿Cuál será la combinación óptima de factores? ¿Cuál será la producción de la empresa?
2. Si la función de producción de la empresa pasa a ser $Q = 4KL$. Calcular el coste total asociado y las cantidades de factores utilizados si el nivel de producción es de 2500.

Apartado 1

- La $RMST$ es:

$$RMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{K}{L}$$

- En el óptimo la $RMST$ coincide con los precios relativos de los factores:

$$RMST = \frac{K}{L} = \frac{1}{2} = \frac{w}{r}$$

- Por tanto, la elección óptima cumple la condición:

$$L = 2K$$

- De acuerdo con el enunciado, los costes son 200 u.m.:

$$200 = 2L + 4K$$

- Sustituyendo la condición de tangencia, $L = 2K$ en la expresión anterior:

$$200 = 2(2K) + 4K = 8K$$

- La combinación óptima de factores es:

$$K = 25; \quad L = 50$$

- La producción de la empresa es:

$$Q = 2KL = 2 \cdot 25 \cdot 50 = 2500$$

Apartado 2

- Cuando la función de producción es $Q = 4KL$, la $RMST$ es:

$$RMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{K}{L}$$

- En el óptimo la $RMST$ coincide con los precios relativos de los factores:

$$RMST = \frac{K}{L} = \frac{1}{2} = \frac{w}{r}$$

- Por tanto, la elección óptima de factores cumple la condición:

$$L = 2K$$

- Si el nivel de producción es de 2500 unidades:

$$2500 = 4KL$$

- Sustituyendo la condición de tangencia, $L = 2K$ en la expresión anterior:

$$2500 = 4K(2K) = 8K^2$$

- La combinación óptima de factores es:

$$K = 17{,}68; \quad L = 35{,}36$$

- Los costes de producción de la empresa son:

$$C = 2L + 4K = 2 \cdot 35{,}36 + 4 \cdot 17{,}68 = 141{,}42\text{u.m.}$$

2. Ejercicio 2

Ejercicio 2

La producción de una empresa queda representada por la siguiente función de producción: $Q = (LK)^{1/2}$

1. Calcular la demanda condicionada para cada uno de los factores de producción.
2. Obtener la función de costes a largo plazo si $w = r = 1$.
3. Obtener las funciones de coste marginal y coste medio a largo plazo.
4. Obtener las funciones de coste total medio, coste variable medio y coste marginal a corto plazo para un nivel de capital $K = 25$.

Apartado 1

- La función de producción puede escribirse como:

$$Q = L^{1/2}K^{1/2}$$

- La relación marginal de sustitución técnica es:

$$RMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{K}{L}$$

- La elección óptima de factores debe cumplir:

$$RMST = \frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

- La condición de tangencia puede escribirse como:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)L$$

- Sustituyendo la expresión anterior en la función de producción:

$$Q = L^{1/2}\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}L^{1/2} = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}L$$

- Despejando L de la expresión anterior obtenemos la **demanda condicionada de trabajo**:

$$L = \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}Q$$

- La condición de tangencia puede escribirse como:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)L$$

- Sustituyendo en la expresión anterior la demandada condicionada de trabajo:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} Q$$

- Simplificando la expresión anterior, obtenemos la **demanda condicionada de capital**:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} Q$$

Apartado 2

- Los costes de la empresa son:

$$C = wL + rK$$

- Si sustituimos en la expresión anterior las demandas condicionadas de factores obtenemos la función de costes a largo plazo:

$$C_{LP}(Q) = wL(Q) + rK(Q)$$

- En nuestro caso:

$$C_{LP}(Q) = w\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} Q + r\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} Q$$

- Simplificando:

$$C_{LP}(Q) = w^{1/2}r^{1/2}Q + r^{1/2}w^{1/2}Q = 2w^{1/2}r^{1/2}Q$$

- Si $w = r = 1$

$$C_{LP}(Q) = 2Q$$

Apartado 3

- El coste medio es el coste total dividido por la producción:

$$CMe_{LP} = \frac{C_{LP}(Q)}{Q} = 2 \text{ u.m. por unidad}$$

- El coste marginal es la tasa a la que crece el coste total por unidad adicional de producción:

$$CMg_{LP} = \frac{\mathrm{d}\, C_{LP}(Q)}{\mathrm{d}\, Q} = 2 \text{ u.m. por unidad}$$

Apartado 4

- Producción a corto plazo:

$$Q = L^{1/2}25^{1/2} = 5L^{1/2}$$

- Demanda condicional de trabajo a corto plazo:

$$L(Q) = \frac{Q^2}{25}$$

- El coste variable es:

$$CV(Q) = wL(Q) = \frac{Q^2}{25}$$

- El coste fijo es:

$$CF = rK = 25$$

- El coste total a corto plazo es:

$$CT_{CP}(Q) = CF + CV(Q) = 25 + \frac{Q^2}{25}$$

- Coste fijo medio:

$$CFMe(Q) = \frac{CF}{Q} = \frac{25}{Q}$$

- Coste variable medio:

$$CVMe(Q) = \frac{CV(Q)}{Q} = \frac{Q}{25}$$

- Coste total medio:

$$CMe_{CP} = \frac{C_{CP}(Q)}{Q} = \frac{25}{Q} + \frac{Q}{25}$$

- Coste marginal a corto plazo:

$$CMg_{CP} = \frac{\mathrm{d}\, C_{CP}(Q)}{\mathrm{d}\, Q} = \frac{2}{25}Q$$

- Se obtiene el mismo resultado tomando la derivada de los costes variables:

$$CMg_{CP} = \frac{\mathrm{d}\, CV(Q)}{\mathrm{d}\, Q} = \frac{2}{25}Q$$

3. Ejercicio 3

Ejercicio 3

> Una empresa presenta la siguiente función de producción: $F(K,L) = L^2K$. Los precios de los factores son: $r = 5$ y $w = 2$.
> 1. Señale el tipo de rendimientos a escala que presenta la empresa.
> 2. Si la empresa desea alcanzar un nivel de producción igual a 200 calcula la cantidad de factores de producción que deberá adquirir la empresa para minimizar el coste de producción.
> 3. Determina la función de costes de producción y el coste total para un nivel de producción $Q = 200$.

Apartado 1

- Cuando todos los factores se multiplican por $\lambda > 1$, se obtiene una producción igual a:

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda L)^2 \lambda K = \lambda^3 L^2 K = \lambda^3 F(K,L)$$

- Como $\lambda > 1$:

$$F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K,L)$$

- La función de producción presenta rendimientos crecientes de escala, puesto que la producción crece en una mayor proporción que la utilización de los factores.

Apartado 2

- La $RMST$ es:

$$RMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = 2\frac{K}{L}$$

- En el óptimo la $RMST$ coincide con los precios relativos de los factores:

$$RMST = 2\frac{K}{L} = \frac{2}{5} = \frac{w}{r}$$

- Por tanto, la elección óptima cumple la condición:

$$L = 5K$$

- El nivel de producción es 200. Por tanto:

$$200 = L^2 K$$

- Sustituyendo la condición de tangencia en la expresión anterior:

$$200 = (5K)^2 K = 25K^3$$

- La combinación óptima de capital es:

$$K = 2; \quad L = 10$$

- El coste de producción es:

$$C = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 30 \text{ u.m.}$$

Apartado 3

- Sustituyendo la condición de tangencia en la función de producción:

$$Q = (5K)^2 K = 5^2 K^3$$

- De la expresión anterior se obtiene la demanda condicionada de capital:

$$K(Q) = \frac{Q^{1/3}}{5^{2/3}}$$

- Sustituyendo esta expresión en la condición de tangencia se obtiene la demanda condicionada de trabajo:

$$L(Q) = 5\frac{Q^{1/3}}{5^{2/3}} = 5^{1/3} Q^{1/3}$$

- El coste de largo plazo es:

$$C_{LP}(Q) = wL(Q) + rK(Q) = 2 \cdot 5^{1/3} Q^{1/3} + 5\frac{Q^{1/3}}{5^{2/3}} = 3 \cdot 5^{1/3} Q^{1/3}$$

- El coste de producir 200 unidades es:

$$C_{LP}(200) = 3 \cdot 5^{1/3} (200)^{1/3} = 3 \cdot 5^{1/3} \left(5^2 \cdot 2^3\right)^{1/3} = 30 \text{ u.m.}$$

4. Ejercicio 4

Ejercicio 4

Una empresa tiene la función de producción: $Q = 2K^{1/2}L^{3/2}$. Sabemos que actualmente contrata 8 unidades de trabajo y 2 unidades de capital, siendo ésta la combinación óptima de factores si sus costes totales son iguales a 16. ¿Cuáles son los precios del capital y del trabajo?

- La combinación óptima de factores debe satisfacer la condición de tangencia entre una isocuanta y una isocoste:

$$RMST = 3\frac{K}{L} = 3\frac{2}{8} = \frac{w}{r}$$

- Por la expresión anterior:

$$3r = 4w$$

- Por otro lado los costes de producción son de 16 u.m.:

$$16 = 8w + 2r$$

- Resolviendo las dos ecuaciones anteriores:

$$r = 2; \quad w = 3/2.$$

5. Ejercicio 5

Ejercicio 5

Suponga que una empresa opera con la tecnología $Q = LK$ y que a corto plazo está utilizando 3 unidades de capital. (Nota: por simplicidad considere $w = r = 1$)

1. ¿Cuál es la demanda condicionada del factor trabajo en el corto plazo (esto es, cuando el nivel de capital es $K = 3$)? ¿Y la función de costes? ¿Y la de costes marginales?
2. ¿Cuál es el único nivel de producción en el que coinciden los costes a largo plazo y los costes a corto plazo? ¿Por qué? ¿Qué ocurre en cualquier otro nivel de producción?

Apartado 1

- Producción a corto plazo:

$$Q = 3L$$

- Demanda condicionada de trabajo a corto plazo:

$$L(Q) = \frac{Q}{3}$$

- Costes a corto plazo:

$$C_{CP}(Q) = CF + CV(Q) = r\overline{K} + wL(Q) = 3 + \frac{Q}{3}$$

- Coste marginal a corto plazo:

$$CMg_{CP} = \frac{\mathrm{d}\, C_{CP}(Q)}{\mathrm{d}\, Q} = \frac{\mathrm{d}\, CV_{CP}(Q)}{\mathrm{d}\, Q} = \frac{1}{3}$$

Apartado 2

- Los costes a corto y a largo sólo coinciden en el nivel de producción para el que $\overline{K}$, la dotación de capital a corto plazo, coincide con la elección óptima de capital a largo plazo.

- Elección óptima de los factores:

$$RMST = \frac{L}{K} = 1 = \frac{w}{r}$$

- Por tanto, a largo plazo $L = K$. Si $K = \overline{K} = 3$, la elección óptima de trabajo a largo plazo es $L = 3$. La producción sería:

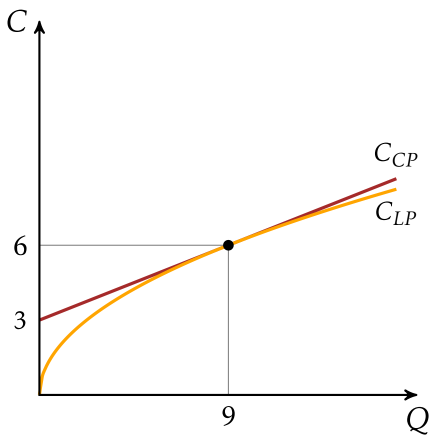
$$Q = LK = 3 \cdot 3 = 9 \text{ unidades.}$$

- Para este nivel de producción coinciden el coste a largo plazo y el coste a corto plazo:

$$C_{LP} = wL + rK = 3 + 3 = 6 \text{ u.m.}$$
$$C_{CP} = 3 + \frac{Q}{3} = 3 + \frac{9}{3} = 6 \text{ u.m.}$$

- Para niveles distintos de producción, los costes a corto plazo son mayores que los costes a largo plazo.

- Condición de tangencia: $K = L$.
- Demanda condicional de capital: $K(Q) = Q^{1/2}$
- Demanda condicional de trabajo: $L(Q) = Q^{1/2}$
- Costes a largo plazo: $C_{LP}(Q) = 2Q^{1/2}$



- Las función de costes a corto plazo es tangente a la función de costes a largo plazo.